π の無理性

非負整数 n に対して

$$I_n(x) = \int_{-1}^{1} (1-t^2)^n \cos xt\,dt \qquad (x \in \mathbb{R})$$

とする. このとき部分積分を行うことにより, $n \geq 2$ のとき

$$\begin{aligned}
x^2 I_n(x) &= x^2 \int_{-1}^{1} (1-t^2)^n \cos xt\,dt \\
&= 2nx \int_{-1}^{1} t(1-t^2)^{n-1} \sin xt\,dt \\
&= 2n \int_{-1}^{1} \left\{(1-t^2)^{n-1} - 2(n-1)t^2(1-t^2)^{n-2}\right\} \cos xt\,dt \\
&= 2n \int_{-1}^{1} \left\{(1-t^2)^{n-1} + 2(n-1)(1-t^2)^{n-1} - 2(n-1)(1-t^2)^{n-2}\right\} \cos xt\,dt \\
&= 2n(2n-1)I_{n-1}(x) - 4n(n-1)I_{n-2}(x)
\end{aligned}$$

となる. ここで, $J_n = x^{2n+1} I_n(x)$ とすると, $I_n(x)$ の漸化式より

$$J_n(x) = 2n(2n-1)J_{n-1}(x) - 4n(n-1)x^2 J_{n-2}(x)$$

となる. ここで以下の補題を示す.

補題. $J_n(x) = n!(P_n(x)\sin x + Q_n(x)\cos x)$ をみたす $P_n, Q_n \in \mathbb{Z}[x], \deg P_n, \deg Q_n \leq n$ が存在する.
証明. 数学的帰納法で示す.

(i) $n = 0, 1$ のとき

$$J_0(x) = 2\sin x, J_1(x) = 4\sin x - 4x\cos x$$

より成り立つ.

(ii) $n = k, k+1$ のとき補題が成立すると仮定する. このとき

$$\begin{aligned}
J_{k+2}(x) &= 2(k+2)(2k+3)J_{k+1}(x) - 4(k+2)(k+1)x^2 J_k(x) \\
&= 2(k+2)(2k+3) \cdot (k+1)!(P_{k+1}(x)\sin x + Q_{k+1}(x)\cos x) \\
&\quad - 4(k+2)(k+1)x^2 \cdot k!(P_k(x)\sin x + Q_k(x)\cos x) \\
&= (k+2)! \left\{ \left(2(2k+3)P_{k+1}(x) - 4x^2 P_k(x)\right)\sin x + \left(2(2k+3)Q_{k+1}(x) - 4x^2 Q_k(x)\right)\cos x \right\}
\end{aligned}$$

となる. よって

$$P_{k+2}(x) = 2(2k+3)P_{k+1}(x) - 4x^2 P_k(x), Q_{k+2}(x) = 2(2k+3)Q_{k+1}(x) - 4x^2 Q_k(x)$$

とすると, $P_n, Q_n \in \mathbb{Z}[x], \deg P_{k+2}, \deg Q_{k+2} \leq k+2$ をみたす. よって, $n = k+2$ のときも成り立つことが示された.

(i), (ii) から数学的帰納法により補題が示された.

ここで, π を有理数と仮定し, $\dfrac{\pi}{2} = \dfrac{a}{b}$ $(a, b \in \mathbb{N})$ とする. 補題の等式と $J_n(x) = x^{2n+1} I_n(x)$ に $x = \dfrac{\pi}{2}$ を代入して整理すると

$$\frac{a^{2n+1}}{n!} I_n\left(\frac{\pi}{2}\right) = P_n\left(\frac{\pi}{2}\right) b^{2n+1}$$

となる. ここで, 右辺は任意の n に対して整数であることに注意する. 左辺は

$$(0 <)|I_n(x)| \leq \int_{-1}^{1} |1-t^2|^n |\sin xt|\,dt \leq \int_{-1}^{1} dt = 2$$

であり, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a^{2n+1}}{n!}=0$ より, 十分大きな自然数 N に対して

$$0<\frac{a^{2N+1}}{N!}I_N\left(\frac{\pi}{2}\right)=P_N\left(\frac{\pi}{2}\right)b^{2N+1}<1$$

をみたす. これは矛盾である.

以上より, π は無理数であることが示された. ■